University of Amsterdam
Theory of Computer Science

Rekenen in een Conservatieve Schrapwet Weide

J.A. Bergstra

Report TCS1405 February 2014

J.A. Bergstra

section Theory of Computer Science
Faculty of Science
University of Amsterdam

Science Park 904
1098 XH   Amsterdam
the Netherlands

tel. +31 20 525.7591
e-mail: J.A.Bergstra@uva.nl

Theory of Computer Science Electronic Report Series

Rekenen in een Conservatieve Schrapwet Weide

Jan A. Bergstra

Sectie Theoretische Informatica, Instituut voor Informatica, Universiteit van Amsterdam
email: j.a.bergstra@uva.nl,janaldertb@gmail.com

27 februari 2014

Samenvatting

Een weide is zowel een generalisatie als een expansie van een lichaam. Als generalisatie is de weide bekend als von Neumann reguliere ring, voor de expansie met inverse heeft de wiskunde geen naam. Van het daarvoor gebruikte Engelse "meadow"maak ik hier "weide". In een weide bestaat de expressie $\frac{1}{0}$ en is de vraag naar de betekenis ervan onontkoombaar. In een conservatieve weide geldt $\frac{1}{0} = 0$, en in een gewone weide geldt $\frac{1}{0} = \mathbf{a}$, een nieuwe waarde van het type getal.

Rekenen in een weide heeft als bijzondere eigenschap in vergelijking met rekenen in een lichaam dat er een duidelijke notie van expressies is waarbij de status van inverse of deling volstrekt vergelijkbaar is met de status van optellen (som) en vermenigvuldigen (product). Het rekenen in een weide kan worden gezien als werken met een beperkt en overzichtelijk aantal herschrijfregels.

Keywords and phrases: Delen door nul, schrapwet weide, herschrijfregel, binaire notatie, decimale notatie.

1 Inleiding

De grammatica van de formele taal van een (getallen-)lichaam omvat nul (0), één (1), optellen (ook wel som genoemd, notatie: $x+y$), vermenigvuldigen (ook wel product genoemd, notatie: $x \cdot y$), minus (ook wel additieve inverse genoemd, notatie: $-x$). Daaraan voegen we toe "één gedeeld door"(ook wel multiplicatieve inverse, notatie: x^{-1}) met als afgeleide operator de deling: $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$. Dit levert de syntax van een weide, de hier voorgestelde vertaling van *meadow*, (voor meadows zie [7]).

Voor deling gebruiken we nog twee alternatieve notaties om een meer flexibele typografie te faciliteren die men beide ook als afgeleide operatie kan zien: $x/y = x : y = \frac{x}{y}$. Het domein van een weide geef ik aan met W. In concrete gevallen is van meer specifieke namen sprake zoals $\mathbb{Q}$ voor de rationale getallen en $\mathbb{R}$ voor de reële getallen.

Een weide voldoet aan de schrapwet als daarin geldt: $x \neq 0 \wedge x \cdot y = x \cdot z \to y = z$. Zo'n weide noemen we een schrapwet weide, als vertaling van *cancellation meadow*, zie [2].

Het doel van dit artikel is primair om Nederlandstalige terminologie voor te stellen in het kader van de theorie van de *meadows* zoals geïntroduceerd in [7] en verder bewerkt in [8, 9, 4, 2] en [3], hierna weiden te noemen. Hoewel deze theorie kan worden gezien als het resultaat van een confrontatie met de vraag "wat is 1/0", is een andere opvatting over de wiskunde van weiden in potentie productiever: het levert een uitgangspunt voor begrijpen van de theorie van de breuken. Deze theorie wordt op allerlei wijzen onderwezen maar is verre van eenvoudig zoals inspectie van het vele Nederlandstalige materiaal uitwijst.

1.1 Wat zijn breuken?

Alleen al de vraag "wat is een breuk" leidt tot verschillende standpunten. Soms leest men dat een breuk een uitkomst van een deling is.[1] De Stichting Goed rekenonderwijs meent bij monde van Jan van de Craats (Wie is er bang voor breuken? een cursus in vier lessen, Les 2 Breuken vereenvoudigen) dat een breuk de uitkomst is van een deling van gehele getallen. Dit is op het eerste gezicht zeker een duidelijk uitgangspunt maar ik betwijfel of het een houdbare positie is. Immers deling is een operatie die een waarde oplevert en de identificatie tussen zo'n waarde en de achterliggende breuk of breuken spreekt niet vanzelf.

Verschillende breuken blijken dezelfde waarde te hebben, over deze waarden leest men weinig in materiaal over breuken. Maar wat men dienaangaande vindt is niet altijd ondubbelzinnig.[2]

1.2 Breuken: een definitie-probleem bezien vanuit de informatica

Het formuleren van een verdedigbaar verhaal over breuken is niet zo eenvoudig als het op het eerste gezicht lijkt, althans niet voor iemand met een achtergrond in abstracte datatypen en theoretische informatica. Laten we om dit punt toe te lichten de "breuk" 1/2 nader bekijken. Allereerst valt op te merken dat "het getal" 1/2 in het lichaam van de de rationale getallen een rationaal getal is, en in het lichaam van de reëele getallen een reëel getal en in het lichaam van de complexe getallen een complex getal. In de termalgebra van een weide is 1/2 een breuk, wanneer we breuken willen zien als een deelverzameling van de uitdrukkingen. Als we schrijven $1/2 = 2/4$ dan noemen we dat een gelijkheid van betekenis van uitdrukkingen die men moet interpreteren in een structuur (hier niet een weide van karakteristiek 2). Als we zeggen dat (de breuken) 1/2 en 2/4 gelijkwaardig zijn dan werken we vermoedelijk in de vrije termalgebra.

De uitdrukking 1/2 is pas een breuk als we er naar kijken vanuit een specifiek standpunt, en vanuit de datatypen is dat het standpunt van de onderliggende vrije algebra van uitdrukkingen over de syntax van de algebra waarin men werkt. Ook een lichaam is een structuur (ofwel een algebra in de zin van de universele algebra) waarbij een syntax hoort, maar in de termalgebra van een lichaam komt 1/2 niet voor omdat men in een lichaam geen naam heeft voor inverse of

[1] In `http://nl.Wikipedia.org/wiki/Breuk` vindt men dat een breuk (in engere zin) de uitkomst is van een deling van een geheel getal door een ander geheel getal. Dit roept meteen de volgende vragen op: is 2/2 een breuk (is de tweede 2 een "ander" getal), heeft 1/1 een andere uitkomst dan 2/2, het zijn verschillende breuken (want ze zijn niet gelijknamig) maar de uitkomst van beide delingen is toch dezelfde, namelijk 1.

[2] Op `http://www.dr-aart.nl/Breuken-wat-is-een-breuk.html` van het Revius lyceum lezen we dat alle breuken samen de rationale getallen vormen. Daar had volgens mij moeten staan "alle equivalentieklassen van breuken".

voor deling. Men kan dus niet stellen dat 1/2 een breuk is in de vrije termalgebra die behoort bij een lichaam. Precies om dat wel te kunnen zeggen dient de overgang naar het werken in een weide.

Ik meen dat de weiden daarbij van pas kunnen komen maar de details daarvan uitwerken is hier niet mijn doel. Het gaat nu slechts om het in kaart brengen van enkele voorbereidende stappen van zo'n project waarbij de vernieuwing erin zou liggen dat abstracte datatypen en termherschrijven als centrale uitgangspunten worden gezien. Dat vanuit deze uitgangspunten een productieve bijdrage aan de theorie van het rekenen, liefst met relevantie voor het rekenonderwijs, kan worden geleverd is niet bij voorbaat zeker, een en ander betreft vooralsnog een experiment.

2 Rekenen

Rekenonderwijs is van alle tijden, maar de vraag wat rekenen is kan desondanks nieuwe aspecten met zich brengen. De idee zoals geformuleerd in [11] dat rekenen geen onderdeel van de wiskunde is vind ik minder voor de hand liggend. In elk geval wordt het op die wijze moeilijker te begrijpen wat rekenen is of kan zijn. Dat volgens [11] en [10] het rekenen een specifieke didactiek vergt die door de gewone didactiek van de wiskunde ontoereikend wordt afgedekt vind ik wel plausibel. Bij deze publicaties valt wel op dat de vraag wat rekenen is volgens de auteurs niet om een expliciete analyse vraagt.

Ik heb de volgende opvattingen over rekenen:

1. Rekenen, te onderscheiden van berekenen (computing), is een menselijke activiteit die zich uit in de competentie om uitdrukkingen in gegeven doch variabele vormen met in achtneming van een eveneens gegeven doelstelling zinvol te transformeren tot (doorgaans in wiskundige zin equivalente, dwz. semantisch gelijke maar syntactisch verschillende) uitdrukkingen in andere vormen, en dit met het oogmerk (en liefst resultaat) om het bereiken van deze doelstelling naderbij te brengen.

   Vindt men, al rekenend vanuit t een r met $t = r$ dan hoopt men aan de vorm van r in directe zin informatie te kunnen ontlenen die men aan de vorm van t slechts in indirecte zin kan ontlenen. Bijvoorbeeld met $t \equiv 9$ en $r \equiv 3^2$ ziet met uit $t = r$ "direct"dat 9 een kwadraat is.

2. Rekenen vindt plaats in de metataal van een wiskundige structuur en op basis van begrip en inzicht, of ook kennis van die structuur. In het bijzonder vinden zogenaamde rekenregels hun rechtvaardiging in de context van zo'n structuur.

3. De structuur waarin (of waarover) men rekent wordt beschreven in taal. Er kan van zeer informele taal sprake zijn. Die structuur representeert wiskundige werkelijkheid en wordt in beginsel in gewone taal omschreven.

   Bijvoorbeeld is een rechte lijn met een nulpunt en "rechts daarvanëen punt dat 1 voorstelt een redelijke wijze om een getallenlijn aan te geven. De punten daarop "zijn"dan de getallen. Dat is weliswaar informeel maar het is niet fout.

4. Uitdrukkingen zijn gesteld in metataal. De metataal is enigszins geformaliseerd in die zin dat duidelijkheid is gewenst over welke primitieven de metataal bevat en over welke transformaties te rechtvaardigen zijn met een beroep op de onderliggende structuur. Vergelijkingen tussen uitdrukkingen zijn gesteld in metataal.

5. Rekenen vergt het beschikbaar hebben van een meta-metataal: een taal waarin over de vorm van uitdrukkingen (gesteld in de metataal) kan worden gesproken en over de mogelijkheden tot transformaties tussen verschillende vormen (klassen van op bepaalde kenmerken overeenkomstige uitdrukkingen). In de meta-metataal komen onder andere de volgende zaken aan de orde:

   (a) Normaalvormen (dat zijn de eenvoudigste vormen voor een bepaalde klasse van uitdrukkingen die men met herschrijfregels omschrijft).

   (b) Ordening van zulke normaalvormen naar eenvoud, zodat men weet waar men heen wil als men een uitdrukking zou moeten of willen vereenvoudigen.

   (c) Wat men aan moet met de opdracht: "bepaal de waarde van de volgende uitdrukking". (Doorgaans is een waarde een kanonieke uitdrukking die opvalt door eenvoud.)

   (d) Ordening van afleidingen en transformaties naar eenvoud, begrijpelijkheid en doelgerichtheid.

   (e) Strategieën om eenvoudige en verdedigbare transformaties te bereiken.

   (f) Methoden om transformaties duidelijk op te schrijven.

6. Er is uiteindelijk nog een nivo boven het meta-metanivo. Op dat nivo is aan de orde de relevantie van de verschillende aspecten van het rekenen, de esthetica ervan, de onderwijsbaarheid ervan en de mate van automatiseerbaarheid, nut en mogelijkheden van computerondersteuning, grafische hulpmiddelen en wat dies meer zij. De in vela landen steeds levende zorgen over de impact van het rekenonderwijs liggen op dit hoogste nivo.

3 Syntax en expressie als de basis van het rekenen

De beschikbaarheid van en de daarmee samenhangende kennis van een syntax (grammatica) is een noodzakelijke preconditie voor het kunnen hanteren van een formele taal waarin de uitdrukkingen op meta-nivo worden gesteld.

De activiteit van het rekenen lijkt onlosmakelijk verbonden te zijn met representaties van uitdrukkingen. Zulke representaties zijn entiteiten op metanivo, en daarmee doorgaans formele entiteiten, want gebonden aan vaste formaten en grammatica's.

Wie een expressie moet (of wil) uitrekenen moet (of wil) weten binnen welke syntax (klasse van vormen) een resultaat wordt verwacht. Wie 17 en 375 optelt verwacht een resultaat in decimale notatie. Het bewust zijn van en kunnen expliciteren van deze verwachting zie ik ook als een rekenvaardigheid. Dat resultaat is niet de uitdrukking $17 + 375$, en al helemaal niet $18 + 374$ maar wel de uitdrukking 392, en deze laatste uitdrukking is zo eenvoudig dat het tevens als een waarde in de onderliggende taal kan worden gezien. Kennelijk bevat een resultaat hier bij voorkeur geen operator +. Desondanks is bij het uitrekenen van 3 - 7 het resultaat -4 wel een adequaat eindresultaat ongeacht het daarin voorkomen van de operator -. Dat minus-teken kan men namelijk niet wegrekenen. Die onmogelijkheid is zelf een bewijsbaar feit uit de meta-theorie, de theorie over het meta-nivo.

3.1 De plaats van uitdrukkingen in het NL rekenonderwijs 1: SLO

In [26] wordt in detail uiteengezet welke aspecten bij beginnend rekenonderwijs aan de orde zouden moeten komen, dit in het kader van een expositie van kerndoelen en leerlijnen terzake. Van een prominente plaats voor het concept uitdrukking (ook wel term, of expressie) is voor zover ik kan beoordelen thans geen sprake.[3]

3.2 Uitdrukkingen in het NL rekenonderwijs 2: SLO/VMBO

In [13] wordt een uitgebreide rekenmethode uiteengezet waarbij uitsluitend opgaven in een betekenisvolle context aan de orde komen. In die opgaven komen expressies niet als zodanig voor en het dat beschouwt men niet als een gemis. De context zorgt altijd voor ondubbelzinnige interpretaties. Anders uitgedrukt: de context levert ruimschooots voldoende informatie voor impliciete typering van uitdrukkingen.

3.3 Uitdrukkingen in het NL rekenonderwijs 3: Freudenthal Instituut

Op [16] vindt men een uiteenzetting over de breukentaal.[4] Teller en noemer worden genoemd, noties die zonder achterliggende conceptie van een uitdrukking geen zinvolle betekenis kunnen hebben. Kennelijk vormen de breuken een speciale klasse van uitdrukkingen. Stambreuken hebben teller 1.

Ook worden benoemde en onbenoemde breuken onderscheiden, zo is 1/2 pizza een benoemde breuk en is 1/2 een onbenoemde (ook wel kale) breuk. Hiermee wordt de indruk wordt gewekt dat benoemde breuken zelf breuken zijn, terwijl het primair entiteiten zijn die samenhangen met de benoemde categorie.

Bij 2/3 is de noemer de naam van de breuk. Kennelijk hebben 1/3 en 2/3 dezelfde naam. Is hier sprake van een voornaam/achternaam analogie?

Gesproken wordt over de noodzaak om leerlingen begrip van deze zaken bij te brengen, en de bij het thema behorende vaktaal, in dit geval de breukentaal, aan te leren. Uit de gegeven

[3] Of ooit op systematische wijze getracht is om rekenonderwijs te baseren op een vooraf omschreven en onderwezen concept van uitdrukking en van een bijbehorende methodiek van transformatie van uitdrukkingen is mij op dit moment niet bekend, en of, indien dat wel is gedaan, er in dat verband doorslaggevende positieve of negatieve ervaringen gerapporteerd konden worden is mij evenmin bekend.

[4] In [18] wordt breukentaal genoemd als *fraction-language*. Tevens is sprake van *formal fractions* en van *informeel fractions*. Een omschrijving van rekenen wordt als volgt gegeven (p 67): "we consider formal arithmetic with fractions to be the ability to use equivalent fractions in a proper manner, as equivalent fractions facilitate fraction operations." Of hier een onderscheid wordt gehanteerd tussen rekenen (als informeel rekenen) en formeel rekenen is mij niet duidelijk.

beschrijving is echter niet gemakkelijk af te leiden hoe men deze breukentaal bedoelt. Wanneer men in deze vaktaal een notie van benoemde breuken zou willen invoeren dan ligt het toch voor de hand dat dat de breuken met een naam zouden zijn.[5]

4 Uitdrukkingen met deling

De vraag die we kunnen oplossen met de introductie van een weide betreft met name het ophelderen van de klasse van uitdrukkingen, al dan niet in de aanwezigheid van variabelen. Ik neem de volgende axioma's aan voor constanten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, en 9: 2 = 1+1, 3 = 2+1, 4 = 3+1, 5 = 4 +1, 6 = 5 + 1, 7 = 6 + 1, 8 = 7 + 1, 9 = 8 + 1. De volgende uitdrukking P is in de gewone wiskunde problematisch (ofwel is mogelijk geen valide uitdrukking) maar is in een weide onproblematisch (zeker wel een valide uitdrukking):

$$P = \frac{(2-1)\cdot 5}{(3-2)\cdot 2-(1+1)}$$

In de gewone wiskundige setting zou men eerst $(3-2)\cdot 2-(1+1)$ correct moeten uitrekenen (met resultaat 0) om vervolgens tot de non-existentie van de gehele expressie te kunnen besluiten. Ofwel, men moet adequaat kunnen rekenen met een gerichte doelstelling (vaststellen dat een noemer niet nul is) en men moet dat rekenwerk toepassen op een deel van een mogelijk achteraf niet bestaande uitdrukking.

Dit alles is laat op basis van lichamen zich niet zo eenvoudig formaliseren. Dat is in een weide vel eenvoudiger. In een behoudende schrapwet weide (met domein W) kunnen we met

[5] De staf van het Freudenthal Instituut heeft zeker de doelstelling gehad om een consistente positie terzake breuken te ontwerpen (zoals in [17]) en om zo te zeggen de onvermijdelijke kosten, in termen van minder directe communicatie met haar diverse doelgroepen, van een gecompliceerder verhaal te dragen. Maar de doelstelling van die positie ligt primair in de didactische en filosofische verantwoording en niet in logisch wiskundige precisie.

Een logisch-wiskundig volledig verhaal over breuken vindt men in de Engelstalige Wikipedia (zie `http://en.wikipedia.org/wiki/Fraction_(mathematics)`). Ook deze tekst roept overigens nog vragen op: zijn *fractional numbers* nu *fractions* of zijn het *rational numbers*? Maar duidelijk is dat *numbers are expressed in the form a/b, a common (alternatively simple or vulgar) fraction* en *the word fraction is used to describe mathematical expressions*. Gesteld wordt dat in de abstracte wiskunde een *fraction* een paar is (a, b) van gehele getallen met $b \neq 0$. Dat moge zo zijn maar dan is de idee dat een breuk een expressie is achter de horizon verdwenen. In de plaats komt de notie van een algebraïsche fractie, die weer de eigenschappen van een expressie heeft. Nu wordt geclaimd dat de eigenschappen (rekenregels) dezelfde zijn als die bij de gewone breuken, maar dat lijkt toch te falen op complicaties rond delen door 0. In elk geval is deze tekst veel preciezer dan veel Nederlands materiaal inclusief de NL Wikipedia op dit punt.

Ik wil hier graag een anecdote noemen waarvan ik het belang voor mijzelf pas zo'n 35 jaar later inzag. In 1971 bleek ik (voor zover mij toen bekend) de laatste student te zijn die in Utrecht het destijds gebruikelijke afsluitend mondeling tentamen over de gehele kandidaatsstof wiskunde aflegde (studierichting W2$'$, voor wie het systeem daar nog kent, en jammergenoeg iets minder ambitieus dan toen wenselijk werd geacht). Het tentamen vond plaats aan de Budapestlaan, het duurde een uur en de hoogleraar Freudenthal en de lector van Tiel namen het gezamenlijk af, een alleraardigste traditie. Dat was ook een hele eer want met beiden had ik nog nooit gesproken. De eerste vraag van Freudenthal luidde, wat is één gedeeld door nul. Ik antwoordde "oneindig of zoietsën dat was fout want één gedeeld door nul bleek volgens Freudenthal niet te bestaan. Gelukkig deed ik het in de rest van het uur beter. Inmiddels zie ik deze vraag van destijds als een duidelijke aanwijzing dat deze kwestie mijn tijd waard is en als een onmiskenbaar blijk van het feit dat Freudenthal zulke issues niet uit de weg ging. De vraag mocht wel worden gesteld. Daarmee nam hij duidelijk afstand van de velen die menen te weten dat delen door nul onzin apriori is.

rekenen aantonen dat $P = 0$, in een gewone schrapwet weide krijgen we $P = \mathbf{a}$, de (naam voor de) additionele waarde $\mathbf{a_W}$ die aan W is toegevoegd.

4.1 Een trade-off

Door in een weide te werken (rekenen) winnen we aan duidelijkheid bij de demarcatie van de notie van een uitdrukking omdat aan de interactie tussen de betekenis van een uitdrukking en de constituerende delen van die uitdrukking enerzijds en het bestaan van die uitdrukking anderzijds een einde wordt gemaakt.[6]

Een prijs die men hierbij betaalt is dat er bij vereenvoudiging resultaten ontstaan (zoals 0 bij de vereenvoudiging van $\frac{1}{0}$ die als resultaat van een rekenpartij zelf minder voor de hand liggend zijn.

Wanneer men de prijs van het moeten accepteren van minder voor de hand liggende uitkomsten van een rekenpartij te hoog vindt is rekenen in een gewone weide meer voor de hand liggend.

4.2 Nieuw terrein?

De aanpak van getallen gebaseerd op een weide in plaats van op een lichaam is afgeleid van de abstracte datatypen uit de theoretische informatica. De ontwikkeling van abstracte datatypen die de klassieke getalsystemen codificeren blijkt traag te verlopen. In [7] vindt men een eenvoudige initiële algebra specificatie van de weide van rationale getallen. Dat was toen een nieuw resultaat.[7] Op dit moment is een leesbare algebraïsche specificatie van rationale met binaire of decimale notatie, inclusief al dan niet repeterende breuken nog niet voorhanden, en zoiets is een noodzakelijke voorwaarde voor zelfs maar een poging tot de ontwikkeling van een op weiden gebaseerde didactiek van het rekenen.

5 Bestaand onderzoek en verdere onderzoeksvragen

Het onderzoek inzake breuken is zeer omvangrijk, een overzicht te geven is hier ondoenlijk. Ik beperk mij tot enkele opmerkingen.

Een centrale positie in het onderzoek naar het rekenen met breuken neemt het werk van Kieren (zie [19]). Daarin wordt de thematiek van breuken gezien als een complex van verschillende deelconstructen, in het bijzonder: deel-geheel, verhouding, quotiënt, operator en maat. In deze visie is geen plaats voor een enkele dominante wiskundige opvatting inzake breuken en rationale getallen.

In [25] wordt duidelijk aangegeven welke aspecten van het werken met breuken bij leerlingen van verschillende leeftijdsgroepen tot problemen leiden. In [14] wordt verslag gedaan van onderzoek dat aangeeft dat goede vaardigheid in het rekenen met breuken een goede voorspeller is voor succesvolle verwerving van verdergaande wiskundige competenties.

[6] Die interactie ligt steeds op de loer, zo is de breuk $\frac{1}{2}$ problematisch in lichamen van karakteristiek 2.

[7] Die specificatie kon in [4] nog vereenvoudigd worden op basis van een idee van Yoram Hirshfeld.

In [22] wordt uiteengezet dat verschillende conceptualiseringen van rationale getallen verschillende begripsproblemen kunnen oplossen. In [24] wordt de neurale basis van *fraction knowledge* behandeld. Die zou dezelfde zijn als de neurale basis van gehele getallen. Er wordt een onderscheid gemaakt tussen *fraction knowledge* welke al bij een leeftijd van 6 maanden kan worden waargenomen en *symbolic fraction knowledge* welke bij vier-jarige leeftijd al wordt aangetroffen.

De centrale rol van *fraction magnitude comparison* wordt benadrukt, en een uitgangspunt (in de abstract) is dat: "Learning about fractions requires children to recognize that many properties of whole numbers are not true of numbers in general and that the one property that unites all real numbers is that they possess magnitudes that can be ordered on number lines."Maar het zijn niet zozeer de *real numbers* als de *expressions denoting real numbers* die zo'n magnitude hebben. De magnitude is immers volledig bepalend voor een "real".

In [15] wordt systematisch gesproken over *rational numbers represented by fractions*. Dit is volstrekt duidelijk. Minder duidelijk is de bewering in deze paper dat het een taak voor de student is "*.. to determine the size and the value of a rational number*". Daar zou iets als *to determine the value of a fraction* moeten staan.

5.1 Equivalente breuken, wat zijn dat?

Een direct in het oog springende kwestie is de behandeling van zogenaamde equivalente breuken. Laat P en Q breuken zijn. P en Q zijn equivalent wanneer beide hetzelfde rationale getal als betekenis hebben. Omdat de rekenregels compleet zijn, kunnen we ook met een beroep op termherschrijven zeggen dat P en Q equivalent zijn wanneer de een naar de ander kan worden herschreven met een bekende familie van herschrijfregels, of wanner beide uitdrukkingen een gemeenschappelijk reduct hebben (zoals voor $2/4$ en $3/6$ voor de hand liggend zou zijn, in de voor de hand liggende omstandigheid dat beide een reduct $1/2$ hebben).

Maar P en Q kunnen een verschillende noemer hebben, dus P en Q zijn op een of andere wijze ook niet-equivalent. Ofwel het kunnen "verschillende breuken zijn". Na introductie van syntactische equivalentie $\equiv$ kunnen we dan zeggen: $P \equiv Q$ geldt niet.

Hoe drukt men nu de equivalentie uit: natuurlijk door $P = Q$. We zien dat verschillende breuken gelijk kunnen zijn. Uitermate verwarrend! Het valt op dat het gelijkheidsteken dus steeds wordt gebruikt voor deze zogenaamde equivalentie. Maar hoe vaak wordt dit expliciet gemaakt? Zou het niet eenvoudiger zijn om te spreken over gelijkheid (in de plaats van equivalentie) en om dan expliciet over syntactische (non)equivalentie te spreken en om daarvoor dan $\equiv$ te gebruiken? Dan kan men stellen dat syntactisch verschillende breuken gelijk kunnen zijn, wel zo eenvoudig te begrijpen. Gelijkheid staat dan voor het hebben van een gelijke betekenis, en de notie van equivalentie valt uit het verhaal.

Dit alles heeft weinig te maken met de algemeen gangbare gedachte dat men rationale getallen construeert via equivalentieklassen van breuken. Dat moge zo zijn, het is in technische zin allerminst onontkoombaar want men kan de rationale getallen net zo goed construeren door vooraf unieke representanten van (equivalentieklassen van) breuken te kiezen, vanuit een perspectief van termherschrijving is dat een volstrekt plausibele route.

Het feit dat in de constructie waar een rationaal getal een equivalentieklasse wordt een equivalentierelatie optreedt is geen noodzakelijke grond om deze relatie ook elders als equivalentie aan te duiden. Dat deze klassieke constructie "de manier waarop dat in de wiskunde gaat"representeert, dat en om die reden deze constructie aparte status zou moeten is een mogelijke maar geen noodzakelijke positie.

5.2 Algebraïsche specificatie van decimale notatie

Een vraagstelling die in de theorie van datatypen nog nauwelijks aandacht heeft gekregen is de algebraïsering van decimale notatie voor natuurlijke getallen en voor breuken. Dit spreekt beslist niet vanzelf en voortgang op dit vlak, dat wil zeggen het ontwikkelen van leesbare en bruikbare specificaties van decimale notatie "on top ofëen conservatieve schrapwet weide, is een preconditie voor een succesvolle introductie van zulke weiden in het rekenen. Een overeenkomstige bewering geldt voor gewone schrapwet weiden.

6 De potentiële relevantie van logisch-wiskundig valide verhalen

Een even intrigerende als onoverzichtelijke vraag is of het iemand die met breuken wil werken nu eigenlijk loont om een consistent (valide) logisch-wiskundig model van breuken en rationale getallen in het hoofd te hebben. Wanneer dat wel zo zou zijn, neemt het te verwachten belang van het werken in weiden toe.

Ik meen dat vanuit de theorie van de abstracte datatypen en universele algebra en met termherschrijving als basistechniek een nieuwe poging kan worden gedaan om het verhaal van de breuken en de rationale getallen zowel zeer elementair als precies en compleet te vertellen. Daarbij is het adopteren van de signatuur van de weiden (en daarmee van een signatuur die een multiplicatieve inverse bevat) een belangrijke stap. Impliciet wordt hier gesteld dat het thans vigerende verhaal over breuken en rationale getallen onvoldoende overtuigend is. Ik meen dat dit bij de breuken zeker zo ligt omdat de setting van een lichaam geen ondersteuning biedt bij de conceptie van breuken als een op syntactische wijze te omschrijven categorie.

Door in en weide te werken wordt de opvatting mogelijk dat een breuk een term is over de signatuur van een weide. Dit werkt vooralsnog alleen in de setting met een unaire notatie, ofwel in de afwezigheid van binair of decimaal genoteerde getallen (zie 5.2 hierboven).

Een theorie te ontwerpen die de praktische toepasbaarheid, bijvoorbeeld in het rekenonderwijs, van een op deze wijze vernieuwd "verhaalöver breuken en rationale getallen kan inschatten is een complexe uitdaging die niet noodzakelijk hoeft te worden worden opgepakt alvorens het ontwerpen van zo'n verhaal ter hand te nemen. eerst het verhaal uit te werken en daarna te bezien of er iets mee te doen valt is de meer pragmatische route.

6.1 De rol van delen door nul

Onder de aanname van de VVRH is een rol voor het expliciet behandelen van delen door nul, vanuit de gedachte dat een VV langs de lijn van het rekenen in een weide het gemakkelijkst valt op te bouwen.

Valide verhalen die gebouwd worden op een notie van expressie ontkomen immers niet aan het bepalen van een positie ten aanzien van de status van delen door nul. Het in kaart brengen van de opties op dit vlak is in aanzet uitgevoerd in [4]. Daar is de conclusie bereikt dat werken in een conservatieve weide een zo grote vereenvoudiging oplevert ten opzichte van de beschikbare alternatieven dat die keuze zich daarmee laat rechtvaardigen.

Op dit moment valt niet uit te sluiten dat werken in een gewone weide voordelen levert omdat het dichter bij de intuïtie staat. In [4] wordt gesproken over uitdrukkingen met variabelen. Bij het ontwerpen van verhalen over breuken kan men zich in eerste instantie tot gesloten expressies beperken. Te beoordelen of en in welke mate ook in die omstandigheden het rekenen in een weide (al dan niet conservatief) voordelen biedt vergt nader onderzoek.

6.2 Uitgangspunten voor een valide verhaal over breuken op basis van termherschrijving

Ontwikkeling van een verhaal over breuken met een prominente rol voor termherschrijving vergt het bepalen van uitgangspunten vooraf. Er zijn qua terminologie zeker keuzen te maken die naar verwachting met tegenwoordige bestaande conventies in het Nederlandstalige wiskundeonderwijs niet in alle opzichten zullen corresponderen.

Bij de inventarisatie van zulke uitgangspunten komen verschillende scenario's in beeld die misschien elk aparte studie verdienen. Hieronder probeer ik één zo'n scenario nader te expliciteren.

1. Rollen van getallen zijn geen eigenschappen van getallen. Het onderscheid dat in [12] wordt gewag gemaakt van meetgetallen, relatieve getallen, verhoudingsgetallen en absolute getallen. Dit taalgebruik zou ik liever willen vermijden.

2. Een breuk is een uitdrukking, ook wel expressie of term. In het bijzonder is een gewone breuk (naar het Engels *common*, *simple* of *vulgar fraction*) een gesloten uitdrukking bestaande uit twee numerals, één boven en één onder een deelstreep. Numerals zijn hier uitdrukkingen voor gehele getallen in voorkeursnotatie (wel 2, maar niet 1+1).

3. Naar Engelstalig gebruik onderscheiden we echte (*proper*) en onechte (*improper*) breuken. Echte breuken hebben een teller kleiner dan de noemer.

4. Gebroken numerals bestaan hetzij uit een enkele 0 of uit een combinatie van een optioneel min-teken, een optionele (positieve) numeral, en een optionele echte breuk zonder teken. Een gebroken numeral bevat niet uitsluitend een minteken.

5. een passend domein voor rationale getallen bestaat uit de verzameling van gebroken numerals.[8]

[8]In [17] op pag. 9 wordt gesteld dat breuken, kommagetallen en procenten elk verschijningsvormen van rationale getallen zijn. Bij de breuken is dat echter en toeval dat afhangt van de wijze waarop men de rationale getallen construeert.

6. Breuken hebben een waarde en die waarde is een rationaal getal. Op de rationale getallen kan men een ordening, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen (mits niet door nul) definiëren.

7. De uitkomst van een bewerking (optellen, vermenigvuldigen, delen) is een rationaal getal.

8. Breuken die dezelfde waarde hebben heten equivalent. Bij breuken P en Q drukt men equivalentie uit door te schrijven $P = Q$, non-equivalentie door $P \neq Q$.[9]

9. Een breuk heeft een noemer en breuken met dezelfde noemer heten gelijkwaardig, anders ongelijkwaardig.[10]

10. Kommagetallen (al dan niet met repeterende breuken) zijn uitdrukkingen die net als de gewone breuken en de gebroken numerals een waarde vinden in de rationale getallen.

11. De gewone breuken, en de gebroken numerals en de kommagetallen zijn een deelverzameling van de "uitdrukkingen van de breukentaal"(*fraction-language expressions*).

12. Bij default verwijst breukentaal naar de breukentaal van een lichaam en zelfs specifieker naar de breukentaal van het lichaam van de rationale getallen, waarbij de decimale notaties voor numerals als een oneindig grote verzameling van constanten wordt gezien.[11]

13. De verzameling van uitdrukkingen van de breukentaal van het lichaam van de rationale getallen laat zich niet gemakkelijk en zonder controversiële keuzen bepalen, en dat is een reden om die fase over te willen slaan en door te zetten naar grotere verzamelingen van uitdrukkingen op basis van conservative of gewone weiden.

14. De uitdrukkingen van de breukentaal (van een lichaam), hoe ook omschreven (of 2/(1-1) er wel of niet bij hoort ligt niet bij voorbaat vast), vormen een echte deelverzameling van de verzameling van uitdrukkingen van de breukentaal van een conservatieve weide en die vormt weer een echte deelverzameling van de verzameling van uitdrukkingen voor een gewone weide.

15. De transformatieregels van conservatieve weiden (met tekenfunctie) zoals genoemd in [3] zijn volledig voor het grotere getalsysteem van de reële getallen wanneer men kijkt naar uitdrukkingen in de breukentaal van een conservatieve weide met variabelen.

    Of diezelfde volledigheid ook te bereiken is voor de weide van de rationale getallen is een vraag die equivalent blijkt aan een klassiek open probleem uit de mathematische logica (de vraag naar algoritmische oplosbaarheid van diophantische vergelijkingen over de rationale getallen).

---

[9] Dit taalgebruik is verre van ideaal, maar er vanaf te wijken levert een grote breuk op met conventioneel taalgebruik. Er zijn verschillende opties: we zouden consequent kunnen zijn en ook bij de numerals voortaan convertibiliteit als equivalentie aanduiden en dus ook zeggen 1+1 is equivalent met 2, schrijfwijze 1+1=2, of we zouden in plaats van equivalentie moeten gaan spreken van syntactische equivalentie (of een andere benaming daarvan) en de breuken 1/2 en 2/4 als gelijk zien.

[10] De bewering "een breuk verandert niet als je teller en de noemer allebei door het zelfde getal deeltïs onjuist: de waarde van een breuk verandert dan niet, maar de breuk verandert wel.

[11] Een adequate omgang met binaire en decimale notatie in de setting van de algebra van lichamen en weiden is zo te zien niet voorhanden en die lacune vergt uitgebreid nader onderzoek. Het nu niet te voorspellen succes van zulk werk kan bepalend blijken voor de relevantie van de aanpak van breuken via een weide.

Volledigheid voor de breukentaal voor een weide[12] wordt al bereikt met de vergelijkingen gegeven in [7].

Een valide verhaal over breuken en rationale getallen vergt ook een adequaat antwoord op tenminste de volgende vragen.

6.3 Generieke vragenlijst voor theorieën over breuken

Deze vragen zijn relevant voor elke verhaal over breuken en rationale getallen. Ze zijn gesteld als vragen aan de auteur(s) van zo'n verhaal (hieronder "het verhaal").

1. Is de bewering "een breuk is de uitkomst van een deling"verdedigbaar, zo ja hoe luidt die verdediging. (De vraag doet zich voor omdat 1/2 en 2/4 verschillende delingen representeren met dezelfde uitkomst.)
2. Is de bewering "als je bij een breuk teller en noemer met 3 vermenigvuldigt dan verandert de breuk niet"verdedigbaar, zo ja hoe luidt die verdediging. Opm. dat de waarde van de breuk niet verandert moge zo zijn, maar de breuk zelf verandert wel, de noemer wordt immers groter.
3. Vaak wordt gesteld: bij een breuk mag je teller en noemer met het zelfde getal vermenigvuldigen. Mag je in een breuk bij teler en noemer ook het zelfde getal optellen, zo nee waarom niet?
4. Heeft "het verhaal"bij de term "echte breukën zo ja:
   (a) wat is dat dan, de vertaling van *common, vulgar, simple fraction*, of iets anders?
   (b) Waarom is deze zaak in het NL taalgebruik niet algemeen vastgelegd?
5. Is 1/2 + 2/3 een breuk, zo ja, wat is de noemer, zo nee wat is het wel?
6. Hebben we er belang bij om naar 1/2+2/3 te kunnen verwijzen anders dan als "opgave zus en zo", zowel door de individuele expressie en naam te geven, als eventueel door een categorienaam zoals b.v. breukensom, complexe breuk, samengestelde breuk of gesplitste breuk?
7. Is de constructie van de rationale getallen via equivalentieklassen van breuken (zoals geformaliseerd op de Engelstalige Wikipedia over *fractions* voor WBG van belang of is die constructie niet meer dan een optie temidden van vele ander opties?
8. Als we schrijven 2+5 = 6+1, is er dan ook sprake van equivalentie (b.v. equivalente sommen), of is er sprake van gelijkheid zonder te hoeven spreken van equivalentie?
9. Hoe spreek je uit: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$? (De vraag is concreet, gebruiken we "isöf "is gelijkwaardig met"?)
10. Zijn $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{4}$ verschillende breuken?

[12]Bij default wordt hier een conservatieve weide bedoeld.

11. Waar ziet men de kracht van “het (eigen) verhaalïn vergelijking met andere verhalen over hetzelfde thema die in binnen-en buitenland worden gepropageerd?

12. Acht men het het denkbaar dat veel docenten onvoldoende begrip hebben van breuken als inhoudelijk onderwerp en dat dit gebrek aan begrip op logisch wiskundig parten speelt. (Ik denk hier aan docenten op alle nivo’s b.v. ook de auteurs van methoden die manifest inconsistente beweringen doen over breuken.)

13. Hoe kijkt men aan tegen de bewering dat rekenen een aparte vorm van onderwijs vergt dat men beter los van wiskunde kan zien en dat beter door andere docenten kan worden onderwezen?

14. Deelt men de opvatting dat elke didactiek van breuken en rekenen gebaseerd moet zijn op een consistent verhaal over de onderliggende wiskunde, zelfs wanneer men dat verhaal niet ten volle aan de leerlingen wil overdragen.

15. Deelt men de opvatting dat meting van korte en lange termijn resultaten van onderwijsactiviteiten inzake breuken en rekenen goed kunnen worden uitgevoerd zonder een expliciet verhaal over breuken en rekenen als uitgangspunt te hebben? (Samen met de vorige ‘stelling”betekent dit dat innovatietrajecten noodzakelijk wel maar evaluatietrajecten mogelijk niet op een consistent verhaal over de onderliggende wiskunde gebaseerd moeten worden).

16. Er is internationaal een omvangrijke literatuur ontstaan over rekenonderwijs. Welk werk speelt in de onderbouwing van “het verhaalëen rol? Indien zo’n rol er niet is, waarom is de Nederlandse situatie zo “anders”dat we het internationale onderzoek veilig buiten beschouwing kunnen laten.

17. Verwacht je dat een leerling die goed kan rekenen ook weet wat de rationale getallen zijn? Zo ja: wat voor definitie kan deze leerling daar dan van geven geven; zo nee, welk aspect van de rationale getallen mist de genoemde leerling (met de grootste kans). Deze vraag kan voor verschillende nivo’s van de leerlingen verschillende antwoorden hebben.

7 Vraagstellingen en inbreng vanuit de theoretische informatica

De gedachte te hebben dat met de introductie van termherschrijfsystemen en abstracte datatypen in het rekenen ons begrip van de materie met sprongen toeneemt en zulks met gunstige toepassingen op het rekenonderwijs zou naïef zijn. Maar belangrijker dan het dempen van te optimistische verwachtingen is vast te stellen dat het hebben van zo’n verwachting niet past bij de rol die logica en semantiek in de informatica op dit moment hebben. Vanuit de semantische kant van de theoretische informatica gezien is, in confrontatie met “het rekenen”, een andere visie aan de orde dan het op tafel leggen van een pakket aan technieken plus de mededeling dat men daarmee vast verder zal komen.

7.1 Legitimiteit van het problematiseren van wat niet duidelijk is

In de theoretische informatica worden vragen gesteld bij delen van de maatschappelijke praktijk: bijvoorbeeld waarom bepaalde encryptie veilig zou zijn, waarom een security protocol betrouwbaar zou zijn, waarom men meent dat een programma voldoende lang getest is, of men wel weet wanneer men de requirements aan een nieuw programma adequaat in kaart heeft gebracht, waarom men meent dat een stuk hardware floating point artithmetic correct uitvoert etc. Bij de klassieke vraag naar de semantiek van programma's en van programmeertalen is ook vaak aan de orde dat practici de kern van de vraag niet begrijpen omdat zij de intuïtie vaak missen dat hun juist eigen ervaringsfeiten een verklaring vergen. Vertaald naar het hierboven besproken thema van het rekenen kan dit worden geconcretiseerd, en wel in de richting van een onderzoeksagenda.

- Er is een grote maatschappelijke praktijk waarneembaar van rekenonderwijs en rekenen. Kijkt men in detail naar wat daar gebeurt, bijvoorbeeld door onderwijsmateriaal te bestuderen en opgaven te maken dan kan zich een conceptueel probleem voordoen: begrijpen we wel wat daar gebeurt? Bij mijzelf is inmiddels de constatering dat ik het meeste onderwijsmateriaal over breuken en rationale getallen bij nader inzien niet begrijp. Dat betekent niet dat het fout is, maar dat er van een taal sprake is waarvan ik de semantiek niet voldoende goed ken.

- Tekstboeken over rekenonderwijs zijn evenmin verklarend voor het rekenen als eenvoudige inleidingen in het programmeren verklarend zijn voor de principes van programmanotaties en programma-uitvoering. Deze tweede gap is erkend groot, maar is vaak onbekend voor de auteurs van inleidend materiaal over programmeren. Bij het rekenen kan zich een soortgelijke situatie voordoen.

- Theoretische informatica vervangt niet een ongefundeerde praktijk door een gefundeerde praktijk maar bestudeert steeds weer de praktijk om van daaruit tot inzichten te komen die na vele iteraties tot een sterkere praktijk aanleiding geven. Die sterkere praktijk is dan doorgaans op veel aspecten verbeterd en in de nieuwe context is toepassing van theoretische inzichten soms ook meer voor de hand liggend dan in de "oude"situatie.

- Vanuit de theorie komt men in eerste instantie vaak tot een fundamentele oplossing van een probleem die een probleem ten principale oplost maar tevens een soort *overkill* introduceert die kosten met zich meesleept welke "in de praktijk"prohibitief blijken te zijn. In onze casus van het rekenen is een mogelijk voorbeeld van die overkill in beeld: wanneer men in de signatuur van de weiden werkt heeft men een grote expressietaal ter beschikking. Maar die taal is misschien veel te groot. Het rekenonderwijs concentreert zich op heel kleine expressieformaten: van belang zijn formaten zonder haakjes, met slechts beperkt voorkomen van bepaalde operaties, semantische eisen aan expressieconstructies (noemer niet nul), flexibele omgang met de doelstelling van de introductie van een expressie, en tenslotte het uitdrukkelijk niet introduceren van een naamgeving van expressies of van een systeem van tekstuele verwijzingen naar expressies.

- De introductie van een weide zou men kunnen zien als een sprong te ver. Maar dan is de vraag in welke mate die sprong te ver is, en hoe we minder ver kunnen springen en hoe we dan beter de maatschappelijke praktijk van het rekenonderwijs kunnen verklaren. Bij dat rekenonderwijs zien we overigens een veelheid aan oplossingen voor dezelfde problemen die doet denken aan de proliferatie van programmeertalen.

7.2 Acht krachten die het rekenen bepalen

Het beeld dat een vanuit de logica of de theoretische informatica geïmporteerd verklaringsmodel een bias in een bepaalde richting introduceert die vervolgens als contraproductief kan worden aangemerkt kan men positief proberen te duiden. De (feitelijk waarneembare) maatschappelijke praktijk (inclusief het rekenonderwijs) is om zo te zeggen een mengsel dat een vorm van bescherming levert tegen extreem doorgevoerde visies. Ik beschrijf dit mechanisme hieronder door acht krachten te noemen die bij het ontwikkelen van rekenonderwijs steeds weer hun invloed uitoefenen en steeds weer tot een evenwicht of compromis moeten komen.

Van deze acht krachten zou men de laatste vijf als beperkende krachten kunnen zien, terwijl de eerste drie krachten als motor van het geheel functioneren.

7.2.1 Drie stuwende en expanderende krachten

Deze krachten los en in combinatie zorgen er steeds weer voor dat aan rekenen veel onderwijstijd wordt besteed.

De staande rekenpraktijk. Er is een (buiten het onderwijs) staande praktijk van het rekenen en participatie daarin dan wel competentie tot die participatie kan vrij eenvoudig worden gemeten zonder enige relatie aan te leggen met verklarende theorie.[13]

Dit a priori en theorieonafhankelijke aspect van de staande praktijk kan men vergelijken met de beoordeling dat een nieuw ontworpen vliegtuig feitelijk kan vliegen: dat vergt geen kennis van de aerodynamica, men kijkt gewoon of het opstijgt. Zo ja dan participeren de makers van het het nieuwe artefact in de community van de vliegtuigbouwers.

Rekenen als instap voor wiskunde. Sommigen menen dat rekenen het begin van de wiskunde is en dat deze competentie succesvol moet zijn verworven voordat men de confrontatie met in wiskundige zin meer geavanceerde inhoud succesvol aan kan.

Rekenvaardigheid als aspecifiek selectiecriterium. Sommigen menen dat rekenvaardigheid voor iedereen van belang is en dat dit belang zodanig groot is dat een groot deel van de ieder cohort aan een test dienaangaande mag worden onderworpen ongeacht de bijdrage die men aan de maatschappij later wil of kan gaan leveren. Men gaat soms zelfs zover nadelige impact (van een matig of slecht testresultaat) op een (onderwijs)loopbaan te accepteren ook bij mensen die een toekomst voor zich zien waarin niet mogelijkwijze een beroep op rekenvaardigheid valt te (h)erkennen.

[13] Deze praktijk unbiased te beschrijven is niet zondermeer mogelijk. In [21] wordt de competentie die ten grondslag ligt aan deze staande praktijk (bezien vanuit de methodiek van traditioneel rekenonderwijs) beschreven als het kunnen uitvoeren van twaalf bewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van resp. natuurlijke getallen, breuken en decimaal genoteerde getallen. Bezien vanuit het realistisch rekenen komen juist andere competenties in beeld.

7.2.2 Vijf beperkende en conserverende krachten

Deze krachten beperken de speelruimte van de vormgeving van rekenen en rekenonderwijs bezien van hit principiële niches.

Doel beperkt middel. De oplossing van een begripsprobleem dat men tegenkomt bij het funderen van een stuk rekenpraktijk mag niet moeilijker zijn dan dat deel van de praktijk zelf. Ofwel: men heft steeds tot doel de participatie aan een stuk bekende maatschappelijke praktijk (hier het kunnen rekenen in allerlei verschijningsvormen) te onderwijzen en wanneer daar funderende theorie voor nodig blikt dan mag het aanleren van die theorie geen extra probleem vormen.

Beperking tot tweewaardige logica. Met kracht wordt vermeden dat een discours ontstaat waarin relevante vragen geen antwoord hebben of waarin naast goed of fout nog een derde mogelijkheid bestaat. Met name door expressieformaten te beperken (maar dat op tamelijk informele wijze) wordt vermeden dat zich vragen voordoen die geen antwoord hebben, zoals bijvoorbeeld de vraag: is $1/0 = 2/0$?

Beperking tot totale functies. Naar vermogen wordt vermeden om met partiële functies te werken. Het toepassen van een functie buiten het domein wordt zo systematisch omzeild dat de vraag wat je moet doen als dat toch voorkomt als het ware “onpraktischïs.

Werken met minimale syntax. Elke nieuw mechanisme wordt uitgelegd in de kleinste syntax waarin het zou kunnen bestaan en met de vergroting van die syntax vanwege uitbreiding van de context wordt vervolgens informeel omgegaan.

Naïeve subsoorten en impliciete typering. Er wordt gewerkt alsof de natuurlijke getallen een deelverzameling zijn van de gehele getallen en zo verder. Dat sprake is van inbeddingen en dat de typering van expressies wel eens problematisch zou kunnen zijn wordt nooit expliciet gemaakt. De expressies zijn primair over hun typering. Ik omschrijf dit as een streven naar het werken met naïeve subsoorten (een verschijningsvorm van de naïeve verzamelingenleer). Dat is in het rekenen erg manifest: dat de vraag of $1/2$ en breuk is of een rationaal getal is wel eens een kwestie van typering kan zijn verschijnt voor zover ik kan zien in het rekenonderwijs als optie niet aan de horizon.

Gebruik van weiden of van termherschrijven kan helpen om een beter begrip te ontwikkelen van de evenwichten die vanuit de interactie van de hierboven genoemde acht krachten kunnen ontstaan. Dat vergt in aspecten verdere ontwikkeling van de theorie va de weiden en misschien ook van de veel verder ontwikkelde theorie van het termherschrijven. Bij die theorieontwikkeling valt niet te vermijden dat instrumenten ontstaan die tegenover een van de vijf beperkende krachten geen stand weten te houden.

Deze krachten zijn, zeker in het geval van moderen rekenondewijs, geen vaste gegevens van alle tijden, een toenemende rol van computers kan de eerste kracht doen verdampen, een andere visie op wiskunde de tweede, maatschappelijke ergernis vier een te grote rol van het rekenen de derde. De beperkende krachten hebben deels ook een ideologische basis maar betreffen ook instelbare parameters die niet voor alle tijden vast staan.

8 Wiskunde in een weide: chaos of orde?

In een weide is de wiskunde anders dan gewoon maar niet onredelijk. Het geval van de conservatieve schrapwet weiden kwam oorspronkelijk aan de orde in [20] en [23] en is uitgebreid onderzocht in [7, 2, 3, 4]. Recente toepassingen van een conservatieve schrapwet weide vindt men in [6] en [5]. Een uitgebreidere motivering van de introductie van schrapwet weiden vindt men in [1].

Mijn dank gaat uit naar Inge Bethke, Alban Ponse en Jan Willem Klop die elk een aantal verbeteringen voor eerdere versies hebben aangedragen.

Referenties

[1] Jan A. Bergstra. Division by Zero and Abstract Data Types. `University of Amsterdam, Informatics Institute, Report TCS1404,` (2014).

[2] Jan A. Bergstra, Inge Bethke, and Alban Ponse. Cancellation meadows: a generic basis theorem and some applications. *The Computer Journal*, 56(1): 3–14, `doi:10.1093/comjnl/bsx147` (2013).

[3] Jan A. Bergstra, Inge Bethke, and Alban Ponse. Equations for formally real meadows. `arXiv.org:1310.5011v3` (2014).

[4] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg. Inversive meadows and divisive meadows. *Journal of Applied Logic*, 9(3): 203–220 (2011).

[5] Jan A. Bergstra and Alban Ponse. Signed meadow valued probability mass functions. `arXiv.org:1307.5173v1` (2013).

[6] J.A. Bergstra, A. Ponse and M.B. van der Zwaag. Tuplix calculus. *Scientific Annals of Computer Science*, 18: 35–61 (2008).

[7] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. The rational numbers as an abstract data type. *Journal of the ACM*, 54 (2), Article 7 (2007).

[8] J.A. Bergstra and J.V. Tucker. Division safe calculation in totalised fields. *Theory of Computing Systems*, 43(3-4), pp 410-424 (2008).

[9] I. Bethke and P.H. Rodenburg. The initial meadows. *J. Symbolic Logic*, 75 (3), 888-895 (2010).

[10] Ria Brandt-Bosman, Pieter Gerrits, Els Loman en Bert Moonen. Opbrengstbewust handelen bij rekenen in het voortgezet onderwijs. *CPS onderwijsontwikkeling en advies*, (2012).

[11] Ria Brandt-Bosman en Jaap Vedder. Hoe leren we de leerlingen goed rekenen. *MESO Magazine*, 192, 24-28 (2013).

[12] Cees Buijs en Pieter van de Zwaart. Aandachtsgebieden voor een doorgaande leerlijn rekenen-wiskunde van po naar vmbo. SLO Enschede, PO/3675.001/06-27, (2006).

[13] Cees Buijs en Pieter van de Zwaart. Verder met Rekenen-wiskunde voor de basisberoepsgerichte leerweg van het VMBO. SLO Enschede, (2010).

[14] Julie Booth and Kristie J. Newton. Fractions: could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology,* 37 pp 247-253 (2012).

[15] Renata Carvalho and João Pedro del Ponte. Student's mental computation strategies with rational numbers represented as fractions. `http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG2/WG2_Carvalho.pdf`, (2012).

[16] Freudenthal Instituut. Dossier doorlopende leerlijnen rekenen-wiskunde. http://www.fi.uu.nl/dll/ (2010).

[17] Ronald Keijzer, Nisa Figueiredo, Frans van galen, Koeno Gravemeijer en Els van Herpen. De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen. *Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht*, ISBN 90-74684-28-9 (2005).

[18] Ronald Keijzer and Jan Terwel. Audrey's acquisition of fractions: a case study into the learning of formal mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47, pp 53-73, (2001).

[19] T. E. Kieren. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. *In R. Lesh ed. Number and measurement, Columbus OH* pp 101-150 (1976).

[20] Y. Komori. Free algebras over all fields and pseudo-fields. Report 10, pp. 9-15, Faculty of Science, Shizuoka University (1975).

[21] J. K. Lenstra et. al. Rekenonderwijs op de basisschool, analyse en sleutels tot verbetering. *KNAW adviesrapport,* `www.knaw.nl/nl/actueel/publicaties/rekenonderwijs-op-de-basisschool`, (2009).

[22] Yuijing Ni. Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology,* 26 pp 400-411 (2001).

[23] H. Ono. Equational theories and universal theories of fields. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 35(2), 289-306 (1983).

[24] Robert S. Siegler, Lisa K. Fasio, Drew B. Bailey, and Xinlin Zhou. Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Science*, 17 (1), pp 13-19 (2013).

[25] Robert S. Siegler, Clarissa A. Thompson, and Michael Schneider. An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology,* 62 pp 273-296 (2011).

[26] SLO. TULE (Toelichting de leerlijnen van) Kerndoelen Rekenen/wiskunde. http://tule.slo.nl/RekenenWiskunde/F-KDRekenenWiskunde.html, (2006).

Electronic Reports Series of section Theory of Computer Science

Within this series the following reports appeared.

[TCS1404] J.A. Bergstra, *Division by Zero and Abstract Data Types,* section Theory of Computer Science - University of Amsterdam, 2014.

[TCS1403] J.A. Bergstra, I. Bethke, and A. Ponse, *Equations for Formally Real Meadows,* section Theory of Computer Science - University of Amsterdam, 2014.

[TCS1402] J.A. Bergstra and W.P. Weijland, *Bitcoin, a Money-like Informational Commodity,* section Theory of Computer Science - University of Amsterdam, 2014.

[TCS1401] J.A. Bergstra, *Bitcoin, een "money-like informational commodity",* section Theory of Computer Science - University of Amsterdam, 2014.

[TCS1301] B. Diertens, *The Refined Function-Behaviour-Structure Framework,* section Theory of Computer Science - University of Amsterdam, 2013.

[TCS1202] B. Diertens, *From Functions to Object-Orientation by Abstraction,* section Theory of Computer Science - University of Amsterdam, 2012.

[TCS1201] B. Diertens, *Concurrent Models for Object Execution,* section Theory of Computer Science - University of Amsterdam, 2012.

[TCS1102] B. Diertens, *Communicating Concurrent Functions,* section Theory of Computer Science - University of Amsterdam, 2011.

[TCS1101] B. Diertens, *Concurrent Models for Function Execution,* section Theory of Computer Science - University of Amsterdam, 2011.

[TCS1001] B. Diertens, *On Object-Orientation,* section Theory of Computer Science - University of Amsterdam, 2010.

Within former series (PRG) the following reports appeared.

[PRG0914] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Autosolvability of Halting Problem Instances for Instruction Sequences,* Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0913] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Functional Units for Natural Numbers,* Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0912] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Instruction Sequence Processing Operators,* Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0911] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Partial Komori Fields and Imperative Komori Fields,* Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0910] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Indirect Jumps Improve Instruction Sequence Performance,* Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0909] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Arithmetical Meadows,* Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0908] B. Diertens, *Software Engineering with Process Algebra: Modelling Client / Server Architecures,* Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0907] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Inversive Meadows and Divisive Meadows,* Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0906] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Instruction Sequence Notations with Probabilistic Instructions,* Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0905] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *A Protocol for Instruction Stream Processing,* Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0904] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *A Process Calculus with Finitary Comprehended Terms*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0903] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Transmission Protocols for Instruction Streams*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0902] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Meadow Enriched ACP Process Algebras*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0901] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Timed Tuplix Calculus and the Wesseling and van den Berg Equation*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2009.

[PRG0814] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Instruction Sequences for the Production of Processes*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

[PRG0813] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *On the Expressiveness of Single-Pass Instruction Sequences*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

[PRG0812] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Instruction Sequences and Non-uniform Complexity Theory*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

[PRG0811] D. Staudt, *A Case Study in Software Engineering with PSF: A Domotics Application*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

[PRG0810] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Thread Algebra for Poly-Threading*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

[PRG0809] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Data Linkage Dynamics with Shedding*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

[PRG0808] B. Diertens, *A Process Algebra Software Engineering Environment*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

[PRG0807] J.A. Bergstra, S. Nolst Trenite, and M.B. van der Zwaag, *Tuplix Calculus Specifications of Financial Transfer Networks*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

[PRG0806] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Data Linkage Algebra, Data Linkage Dynamics, and Priority Rewriting*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

[PRG0805] J.A. Bergstra, S. Nolst Trenite, and M.B. van der Zwaag, *UvA Budget Allocatie Model*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

[PRG0804] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Thread Algebra for Sequential Poly-Threading*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

[PRG0803] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Thread Extraction for Polyadic Instruction Sequences*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

[PRG0802] A. Barros and T. Hou, *A Constructive Version of AIP Revisited*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

[PRG0801] J.A. Bergstra and C.A. Middelburg, *Programming an Interpreter Using Molecular Dynamics*, Programming Research Group - University of Amsterdam, 2008.

The above reports and more are available through the website: www.science.uva.nl/research/prog/

Electronic Report Series

section Theory of Computer Science
Faculty of Science
University of Amsterdam

Science Park 904
1098 XG Amsterdam
the Netherlands

www.science.uva.nl/research/prog/